

סהב	3	2	1

מבחן מועד א' במודלים חישוביים, סמסטר ב' תשע"ב (2012)

בית הספר למדעי המחשב, אוניברסיטת תל-אביב

מרצים: פרופ' ישי מנצור, ד"ר יפתח הייטנר

מתרגלים: מריאנו שיין, אורי להב

15/07/12

הוראות

1. מומלץ לקרא את כל ההנחיות והשאלות בתחילת המבחן, לפני תחילת כתיבת התשובות.
2. משך הבחינה – שלוש שעות. לא תינתן כל הארכה נוספת.
3. חומר עזר מותר: שני דפי פוליו (דו צדדיים) בלבד עם שם התלמיד/ה.
4. **יש לענות על השאלות הסגורות בטופס התשובות ועל השאלות הפתוחות במקום המיועד לכך בטופס השאלון (טופס זה).** מחברות הבחינה לא ייקראו, וישמשו כטיטה בלבד.
5. יש למלא בכל דף של השאלון מספר ת.ז. ומספר מחברת.
יש למלא בטופס התשובות שם, מספר ת.ז. ומספר גרסה.
6. במבחן 10 שאלות סגורות ו-2 שאלות פתוחות.
א. בנוגע לשאלות הסגורות:
 - הניקוד לכל שאלה הינו 6 נקודות. תשובה שגויה לא תזכה לנקודות.
 - לכל שאלה יש לסמן תשובה אחת בטופס התשובות המצורף.
 - יש לזכור למלא שם, ת.ז. ומספר גרסה בטופס התשובות המצורף.ב. בנוגע לשאלות הפתוחות:
 - הניקוד לכל שאלה הינו 20 נקודות.
 - יש לענות על השאלות במקום המיועד לכך בטופס השאלון.
 - יש לענות תשובות ברורות ענייניות ותמציתיות.
7. מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בכיתה (בהרצאה, בתרגול, או בתרגיל בית) בתנאי שמצטטים אותה במדויק. טענות אחרות (כאלה שהוכחו בספר, בהרצאות מהסמסטר הקודם, וכו') יש להוכיח.

בהצלחה!

מספר הגרסה שלך הוא: 1

סמן זאת כרגע בטופס התשובות!

חלק א: שאלות סגורות

שאלה 1

תהא L שפה מעל $\{0,1\}$ ו- h הומומורפיזם מ- $\{0,1\}$ אל $\{a,b,c,d\}^*$.
נגדיר: $L_1 = h^{-1}(h(L))$.

טענה א: $L \subseteq L_1$

טענה ב: $L_1 \subseteq L$

- א. טענה א תמיד נכונה וטענה ב לפעמים שגויה.
- ב. טענה ב תמיד נכונה וטענה א לפעמים שגויה.
- ג. טענה א תמיד נכונה וטענה ב תמיד נכונה.
- ד. טענה א לפעמים שגויה וטענה ב לפעמים שגויה.

ראו הרצאה 2 שקף 34.

דוגמא נגדית עבור טענה ב: $L = \{0\}$, $h(0) = a$, $h(1) = a$. נקבל $h(L) = \{a\}$ ו- $L_1 = \{0,1\}$.

שאלה 2

טענה א: לכל שפה L : אם L^* רגולרית, אז L רגולרית.
טענה ב: לכל שפה L : אם L^* כריעה, אז L כריעה.

- א. טענה א נכונה וטענה ב שגויה.
- ב. טענה ב נכונה וטענה א שגויה.
- ג. טענה א נכונה וטענה ב נכונה.
- ד. טענה א שגויה וטענה ב שגויה.

דוגמא נגדית לשתי הטענות: $L = \{0,1\} \cup A_{TM}$ (כאשר קידוד המכונות וקלטיהן ב- A_{TM} נעשה בעזרת $\{0,1\}$)

שאלה 3

בשאלה זו הנח ש- $P \neq NP$.
תהי A שפת NP-hard ו B שפה ב NP.
ניח שקיימת רדוקציה מיפוי פולינומיאלית מ A ל B .

טענה א: A היא בהכרח NP-complete.
טענה ב: B היא בהכרח NP-complete.

- א. טענה א נכונה וטענה ב שגויה.
- ב. טענה ב נכונה וטענה א שגויה.
- ג. טענה א נכונה וטענה ב נכונה.
- ד. טענה א שגויה וטענה ב שגויה.

A ב-NP נובע מכך ש- B ב-NP ומקיום הרדוקציה.
 B ב-NP-hard נובע מכך ש- A ב-NP-hard ומקיום הרדוקציה. מהנתון בשאלה ב-NP.

שאלה 4

השפה L מתקבלת מדקדוק חסר הקשר עם משתנים $\{B,A,S\}$, משתנה התחלתי S , וחוקי הגזירה הבאים:
 $S \rightarrow AS \mid SB \mid \epsilon$
 $A \rightarrow OA \mid \epsilon$
 $B \rightarrow 1B \mid \epsilon$

השפה הרגולרית R מתקבלת מהביטוי הרגולרי $(00^* U \epsilon) 1^*$.

- א. L מוכלת ממש ב R .
- ב. R מוכלת ממש ב L .
- ג. $R=L$.
- ד. טענות א, ב ו-ג אינן נכונות.

שתי השפות הן שפות כל המילים מהצורה 0^*1^* .

שאלה 5

$$\{ \langle M \rangle \mid M \text{ is a TM such that in the computation of } M(\epsilon) \text{ the head moves left at most } 2012 \text{ times} \}$$

(הערה: ניסיון תנועה שמאלה כאשר הראש נמצא בקצה השמאלי של הסרט נחשב כתנועה שמאלה.)

לאיזו מחלקה שייכת שפה זו ?

- א. R .
- ב. $RE \setminus R$.
- ג. $coRE \setminus R$.
- ד. תשובות א', ב', ג' אינן נכונות.

בהינתן קונפיגורציה של מ"ט M , ניתן לבדוק אם הריצה החל מקונפיגורציה זו מובילה לתנועה שמאלה: נדמה את ריצת M מקונפיגורציה זו עד שנקבל תנועה שמאלה, או שנהיה במצב בו הראש רואה 'רווח' למשך $|Q|+1$ צעדים. אחד מאלו חייב לקרות בזמן סופי. אם הראשון קורה נקבל, ואם השני – נדחה.

נבצע בדיקה כזו עבור הקונפיגורציה ההתחלתית עם המילה הריקה בתור קלט. אם היא לא מובילה לתנועה שמאלה נקבל. אחרת, נבצע בדיקה נוספת החל מהקונפיגורציה בה הסתיימה הבדיקה הקודמת. שוב, אם היא לא מובילה לתנועה שמאלה, נקבל. אחרת, נבצע בדיקה נוספת, וכך הלאה. לאחר 2013 בדיקות שהובילו לתנועה שמאלה נדחה.

שאלה 6

$$REPEATS - STATE = \left\{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ is a TM that visits some state more than once in processing input } w \right\}$$

לאיזו מחלקה שייכת שפה זו ?

- א. R .
- ב. $RE \setminus R$.
- ג. $coRE \setminus R$.
- ד. תשובות א', ב', ג' אינן נכונות.

מספיק להריץ את M על w $|Q|+1$ צעדים. אם בזמן זה M עברה במצב כלשהו יותר מפעם אחת, נקבל. אחרת, M בהכרח עצרה ואז נדחה.

שאלה 7

המחלקה PD היא קבוצת כל השפות עבורן קיים פולינום p ומ"ט אי-דטרמיניסטית M כך ש-
 1. לכל w בשפה, קיימת ריצה של M על w שעוצרת תוך לכל היותר $p(|w|)$ צעדים.
 2. לכל w שאינו בשפה, כל ריצה של M על w לא עוצרת.

א. $PD=R$.

ב. $PD=NP$.

ג. $PD=P$.

ד. תשובות א', ב', ג' אינן נכונות.

בהינתן מכונה כזו M עבור שפה L ניתן לבנות מכונה אי-דטרמיניסטית M' שפועלת כמו M ובמקביל סופרת את צעדי הריצה ומשווה לערך $p(|w|)$. אם M עצרה תוך פחות מ- $p(|w|)$ צעדים, M' תקבל. אחרת, M' תדחה. M' היא מכונה אי-דטרמיניסטית שמקבלת L בזמן פולינומיאלי (ספירת הצעדים והשוואה ל- $p(|w|)$ נעשית בזמן פולינומיאלי). לכן, L שייכת ל- NP . בכיוון השני, כל מכונה אי-דטרמיניסטית ניתן לשנות כך שבמקום לדחות היא לא תעצור, ונקבל מכונה כנדרש.

שאלה 8

מ"ט משוכללת מוגדרת בדיוק כמו מ"ט רגילה רק שכל צעד מתבצע בהתאם לתוכן הסרט החל מהקצה השמאלי ועד למיקום הראש בסרט (פונקציות המעברים במקרה זה שייכת ל $\{L,R\} \times \Gamma^* \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L,R\}$).

א. לכל שפה L קיימת מ"ט שמכריעה את L אם"ם קיימת מ"ט משוכללת שמכריעה את L .

ב. לכל שפה L קיימת מ"ט שמכריעה את L בזמן פולינומיאלי אם"ם קיימת מ"ט משוכללת שמכריעה את L בזמן פולינומיאלי (פולינומיאלי באורך הקלט).

ג. התשובות א ו-ב נכונות.

ד. התשובות א ו-ב אינן נכונות.

כל שפה ניתנת להכרעה ע"י מ"ט משוכללת ב- $O(n)$ (הוא אורך הקלט). נבנה פונקציות מעברים שגורמת לתנועה ימינה כל עוד לא רואים רווח, וברגע שרואים רווח עוברת למצב מקבל או דוחה בהתאם למילה הכתובה על הסרט.

שאלה 9

אוטומט IFA מוגדר בדיוק כמו DFA, למעט השינוי הבא:

- מילה w מתקבלת ע"י IFA אם ורק אם ריצת A על w עוברת במצב מקבל.

נסמן ב-IREG את קבוצת על השפות שניתנות לזיהוי ע"י IFA.

א. IREG סגורה תחת משלים.

ב. IREG סגורה תחת איחוד.

ג. IREG סגורה תחת Reverse.

ד. התשובות א', ב', ג' כוללות יותר מתשובה אחת נכונה.

אי סגירות תחת משלים, למשל עבור $L(0(0U1)^*)$. קל לבנות IFA עבור שפה זו (עוברים למצב מקבל אם התו הראשון 0). המשלים כולל את המילה הריקה, לכן המצב ההתחלתי ב-IFA עבור המשלים חייב להיות מקבל, אבל אז נקבל כל מילה.

אי סגירות תחת Reverse, למשל עבור $L(0(0U1)^*)$. ה-Reverse כולל את המילה 0, אך לא את 01. אבל אם IFA מקבל את 0 הוא בהכרח יקבל גם את 01.

סגירות תחת איחוד – מוכיחים בדיוק כמו שהוכחנו סגירות תחת איחוד לשפות רגולריות.

שאלה 10

ניזכר כי $DTIME(t(n))$ היא קבוצת כל השפות הניתנות להכרעה ע"י מ"ט דטרמיניסטית (חד סרטית) הרצה בזמן $O(t(n))$.

נגדיר $3DTIME(t(n))$ כקבוצת כל השפות הניתנות להכרעה ע"י מ"ט דטרמיניסטית תלת-סרטית הרצה בזמן $O(t(n))$.

טענה א: $3DTIME(n^2)$ מכילה ממש את $DTIME(n^2/\log n)$.
טענה ב: $U_{c>0} 3DTIME(n^c)$ מכילה את $DTIME(2^n)$.

א. טענה א נכונה וטענה ב שגויה.

ב. טענה ב נכונה וטענה א שגויה.

ג. טענה א נכונה וטענה ב נכונה.

ד. טענה א שגויה וטענה ב שגויה.

טענה א' נכונה כי ניתן לסמלץ $n^2/\log n$ צעדים של מכונת טורינג חד-סרטית ע"י מ"ט תלת-סרטית הרצה בזמן $O(n^2)$.

טענה ב' אינה נכונה כי $U_{c>0} 3DTIME(n^c)$ שווה ל $U_{c>0} DTIME(n^c)$ (ניתן לסמלץ מ"ט תלת-סרטית הרצה בזמן n^c ע"י חד-סרטית הרצה בזמן $O(n^{2c})$).

חלק ב: שאלות פתוחות

שאלה 1

בעיית הכרעה SET-SPLIT היא הבעיה הבאה:

קלט: קבוצה M ו- n תת קבוצות שלה A_1, \dots, A_n
שאלה: האם אפשר לחלק את M לשתי קבוצות S_1 ו- S_2 (כלומר: $S_1 \cup S_2 = M$ ו- $S_1 \cap S_2 = \emptyset$) כך שלכל $1 \leq i \leq n$: $A_i \subseteq S_1$ או $A_i \subseteq S_2$?

היזכרו בבעיית 4NAE (ראינו בתרגול שבעייה זו שייכת ל-NPC).

קלט: נוסחא A בצורת 4CNF
שאלה: האם יש השמה שעבורה בכל פסוקית (clause) של A יש לפחות ליטרל אחד שמקבל T וליטרל אחד שמקבל F ?
(הערה: ליטרל יכול להופיע יותר מפעם אחת בפסוקית)

כדי להוכיח ש-SPLIT-SET היא NP-hard, הוצעה רדוקציה המיפוי הפולינומיאלית הבאה:

הרדוקציה מקבלת נוסחת 4CNF A ומחזירה M – כל המשתנים שמופיעים ב- A ושילתם לכל פסוקית של A מהצורה $a \vee b \vee c \vee d$ (הם ליטרלים), הרדוקציה בונה קבוצה $A = \{a, b, c, d\}$ (n הוא מספר הפסוקיות ב- A)

א. הצג דוגמא שמוכיחה שהרדוקציה לא נכונה.

תשובה:

$$A = (x_1 \vee x_1 \vee x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_1 \vee x_2)$$

A is not in 4NAE (if $x_2=1$ then if $x_1=1$ first term is violated, if $x_1=0$ ($\neg x_1=1$) then second term violated. Similar if $x_2=0$)

We obtain:

$$M = \{x_1, \neg x_1, x_2, \neg x_2\}$$

$$A_1 = \{x_1, x_2\} \quad A_2 = \{\neg x_1, x_2\}$$

M, A_1, A_2 is in SET-SPLIT (take $S_1 = \{x_1, \neg x_1\}$ and $S_2 = \{x_2, \neg x_2\}$)

תעודת זהות:

מספר מחברת:

ב. הצע תיקון לרדוקציה והוכח נכונות בקצרה.

תשובה:

Add an addition set A_i 's of the form $\{x_i, -x_i\}$ one for each variable appearing in A .

שאלה 2

א. נתונה השפה $L_1 = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ is a TM and } L(M) \subseteq L(1(1U0)^*) \}$

לאיזה מחלקה שייכת השפה?

- א. R.
- ב. $RE \setminus R$.
- ג. $coRE \setminus R$.
- ד. תשובות א', ב', ג' אינן נכונות.

הוכחה:

In coRE: a non-deterministic TM for not(L1) would guess some word x not in $L(1(1U0)^*)$, run M on x, and accept iff M accepted x.

Not in R: by Rice thm.

תעודת זהות:

מספר מחברת:

ב. נתונה השפה $L_2 = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ is a TM and } L(M) = L(1(1U0)^*) \}$

לאיזה מחלקה שייכת השפה?

א. R

ב. $RE \setminus R$

ג. $coRE \setminus R$

ד. תשובות א', ב', ג' אינן נכונות.

הוכחה:

By the following mapping reduction from ALL_TM ($ALL_TM = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \{0,1\}^* \}$):

Given $\langle M \rangle$, return a description of a TM that does the following:

1. if the input has the form $1x$, run M on x , and return the same answer.

2. otherwise, reject.

Alternative solution:

A reduction from A_{TM} to L_2 and from $\neg A_{TM}$ to L_2