סקיצת פתרון מבחן מועד א' במודלים חישוביים, סמסטר א' 2011

חלק א: שאלות סגורות

שאלה 1

תשובה: ג

קל לבנות NFA לשפה L_1. קל לראות ע"י למת הניפוח ש-L_2 לא רגולרית.

שאלה 2

תשובה: ג

ב-coRE: אם נעבור על כל הקלטים האפשריים "במקביל" נוכל לקבל כאשר מזוהים שני קלטים שלהם אותו הפלט.

לא ב-R: רדוקציית מיפוי מהמשלים של A_{TM}: בהינתן <M,x> הרדוקציה תחזיר קידוד של מ"ט 'M שמריצה את M על x מחזירה את המילה הריקה אם M קבלה, ולא עוצרת אחרת.

הערה: למעשה, ההגדרה הראשונה שניתנה בתזכורת אינה מדויקת. מתוך הגדרה זו נובע שכל מכונה מחשבת את הפונקציה הריקה, וזו כמובן פונקציה חח"ע, והשפה היא פשוט שפת כל הקידודים של מ"ט. על כן התקבלה גם תשובה א.

(הגדרה מתוקנת: מ"ט M מחשבת פונקציה (חלקית) $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ אם לכל קלט $w\in\Sigma^*$ עליו f מוגדרת, M עוצרת כשבסיום הריצה כתוב על הסרט f(w), ולכל קלט $w\in\Sigma^*$ עליו f לא מוגדרת, M לא עוצרת.)

שאלה 3

תשובה: א

A כריעה: זה שקול לשאלה $L(G)\cap comp((L(N))=\phi$. ואכן, ראינו כיצד לבנות אוטומט מחסנית לשפה שהיא חיתוך של שפה חסרת הקשר עם שפה רגולרית. מאוטומט זה אפשר לעבור לדקדוק, ובעיית הריקנות עבור דקדוק היא כריעה.

B לא כריעה: אם הייתה כריעה היינו בקלות יכולים להכריע את הבעיה ALL_{CFG} (ניקח בתור N אוטומט שמקבל את Σ^*).

שאלה 4

תשובה: א

בהינתן DFA לשפה L_1 שקבוצת המצבים שלו היא Q, DFA לשפה L_2 יתקבל ע"י תוספת מעברים המסומנים ע"י # בין כל זוג מצבים ביניהם ניתן לעבור ע"י מילה ב-L_2.

שאלה 5

תשובה: ד

שפה סופית היא רגולרית. השפות הרגולריות סגורות תחת משלים והפרש.

קל לבנות דקדוק חסר הקשר לשפה D.

$C\cup B$ לא יכולה להיות רגולרית, כי אז גם $(C\cup B)-(B-C)$ רגולרית וזו היא השפה C.

שאלה 6

תשובה: ב

ב-RE: ניתן לדמות את הריצה של M על w ותוך כדי לבדוק אם M עצרה או אם היא עברה בקונפיגורציה שכבר עברה בה.

לא ב-R: רדוקציית מיפוי מ H_{TM}: בהינתן <M,x> הרדוקציה תחזיר קידוד של מ"ט 'M שמריצה את M על x, אבל לפני כל צעד של M דואגת לשנות את הקונפיגורציה שלה (ע"י שמירת מונה צעדים למשל).

שאלה 7

תשובה: ג

טענה 1 לא נכונה: מכיוון שייתכן שבכלל לא קיימת רדוקציה פולינומיאלית בין שפות, ובפרט לא קיימת רדוקציה פולינומיאלית מקצרת אורך.

טענה 2 לא נכונה: ניקח למשל את הרדוקציה שהיא פונקציית הזהות. ברור שהיא רדוקציית מיפוי פולינומיאלית, אך אינה מקצרת אורך.

הערה: למעשה, נפלה טעות הגהה בשאלה: בטענה הראשונה הושמט "לכל שתי שפות **L1,L2∈P**...".

עם תיקון זה, התשובה הנכונה היא א. שתי התשובות (א ו-ג התקבלו כתשובות נכונות בבדיקה).

עם התיקון, טענה 1 נכונה: מכיוון ש-L_2 לא טריוויאלית קיימים $a\in L_2$ ו-b שלא נמצא ב-L_2. נבחר $n=max\{|a|,|b|\}+1$ ואת הרדוקציה f שמחזירה את a אם הקלט שלה ב-L_1 ואת b אם לא. הרדוקציה חשיבה בזמן פולינומיאלי כי L_1 ניתנת להכרעה בזמן פולינומיאלי. כמו כן, לכל $|x|<n$ $|f(x)|$, ולכן לכל $|x|\geq n$, $|f(x)|\leq|x|-1$.

שאלה 8

תשובה: ב

ב-NP: קל לבנות מוודא שיקבל כעד את ההשמה שמפרידה בין הפסוקים.

ב-NPC: רדוקציית מיפוי פולינומיאלית מ-SAT, בהינתן נוסחה C נחזיר את C ואיזושהי נוסחה קבועה שהיא סתירה לוגית.

אם $P\neq NP$ אז מאחר ושפה זו היא ב-NPC היא אינה ב-P.

חלק ב: שאלות פתוחות

<u>שאלה 1</u>

הטענה נכונה.

רדוקציית מיפוי מבעיית הקבלה. בהינתן M ו-W, נבנה את המכונה M_1 באופן הבא. בהינתן קלט X, M_1 מקבלת אם X=01. אחרת M_1 מריצה את M על W ומקבלת את X אם M מקבלת את W.
קל לראות שאם M מקבלת את W, אז M_1 מקבלת את Σ^*; ואם M לא מקבלת את W, אז M_1 מקבלת את {01}.

<u>שאלה 2</u>

הטענה נכונה.

קל לראות שהבעיה ב-NP. נראה רדוקציית מיפוי פולינומיאלית מבעיית הקליק.

הרדוקציה ממפה זוג <G,k> לזוג <G',k'>, כאשר:

- $k' = k + |V| + 1$ (V זה קבוצת הצמתים של G).
- G' ייבנה באופן הבא: נוסיף ל-G $|V| + 1$ צמתים חדשים ונחבר כל צמת חדש לכל צמת אחר בגרף (כלומר קבוצת הצמתים החדשים הינה קליק בגודל $|V| + 1$, וכל צמת מחובר לכל צמת אחר בגרף המקורי).

קל לוודא שהרדוקציה ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי. נראה את נכונות הרדוקציה.

1. נניח שב-G יש קליק בגודל k. אז צמתי הקליק בצירוף כל הצמתים החדשים גם מהווים קליק בגודל $k + |V| + 1$.
2. נניח שב-G אין קליק בגודל k. נניח בשלילה שמתקיים אחד הדברים הבאים:
   - ב-G' יש קליק בגודל $k + |V| + 1$. אז חייבים להיות בו לפחות k צמתים מהגרף הישן (כי יש בדיוק $|V| + 1$ צמתים חדשים ב-G'), בסתירה להנחה שאין קליק בגודל k ב-G.
   - יש IS בגודל $k + |V| + 1$ ב-G'. מכיוון שהצמתים החדשים מחוברים לכל צמתי הגרף, הם אינם יכולים להיות חלק מ-IS. לכן יש IS בגודל $k + |V| + 1$ ב-G, בסתירה לעובדה שמספר הצמתים ב-G הוא |V|.

<u>שאלה 3</u>

כיוון ראשון: נניח ש-L ב-RE. תהא M מ"ט שמקבלת אותה. מוודא עבור M יקבל x,c ויבדוק ש-c מהווה היסטוריה חישובית מקבלת של M על x (מה שכינינו בתרגול checker).

כיוון שני: נניח שקיים מוודא עבור L. כדי להכריע למחצה את L, נוכל לבדוק (במקביל) את כל הקלטים האפשריים בתור עדים למוודא ולקבל כאשר המוודא קיבל את אחד מהם.