מבחן במודלים חישוביים + פתרון מוצע

סמסטר ב' התש"ע, מועד ב'

תאריך: 10.8.2010

מרצים: פרופ' רונית רובינפלד, פרופ' בני שור

מתרגלים: יהונתן ברנט, רני הוד

מומלץ לקרוא את כל ההנחיות והשאלות בתחילת המבחן, לפני תחילת כתיבת התשובות.

- משך הבחינה שעתיים ו־45 דקות.
- חומר עזר מותר: שני דפי A4, כתובים משני הצדדים.
- בראש כל עמוד בטופס המבחן יש למלא מספר ת"ז ומספר מחברת; בטופס התשובות יש למלא מספר ת"ז, **מספר גירסא** ומספר מחברת.
- במבחן שני חלקים. בחלק הראשון שלוש שאלות פתוחות (17 + 18 + 20 ובסה"כ 55 נק') ובחלק השני 9 שאלות סגורות (5 נק' כל אחת). כדי לקבל ציון 100 בבחינה יש לענות נכונה על כל השאלות.
  - תשובות לשאלות הסגורות יש לסמן במקום המתאים לכך <u>בטופס התשובות</u>. בכל שאלה יש לסמן תשובה יחידה.
  - על התשובה לכל שאלה פתוחה להופיע במסגרת המתאימה <u>בטופס המבחן</u> (טופס זה). יש לענות תשובות ברורות ותמציתיות. תשובות מסורבלות או לא ניתנות פיזית לקריאה יזכו לניקוד חלקי בלבד.
  - ודא/י היטב את תשובתך לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף חלק א' מצורפת מסגרת לשימוש במקרי "חירום".
  - מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד ולא תיבדק, אך יש להגישה עם המבחן.
- על סעיף של שאלה פתוחה ניתן לענות *"אינני יודע/ת"* כתשובה; על סעיף זה יינתנו 20% מהנקודות (מעוגל למעלה). במקרה זה <u>אין</u> להוסיף שום הסבר.
- מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בכיתה (בהרצאה, בתירגול או בתרגיל הבית) בתנאי שמצטטים אותה באופן מדויק. טענות שהוכחו במקום אחר (כגון: בספר הלימוד, בויקיפדיה, ב־MIT, בסמסטר קודם) יש להוכיח מחדש.
- אלא אם נאמר אחרת במפורש, כל המספרים המופיעים בשאלות הם שלמים, אי־שליליים ונתונים בייצוג בינארי.
- בשאלות בהן יש לתאר מכונת טיורינג ניתן להסתפק בתיאור מילולי *משכנע* של אופן פעולת המכונה. אין צורך להגדיר במדויק את פונקצית המעברים δ אלא אם השאלה מבקשת זאת במפורש.
- בכל השאלות ניתן להניח כי $\mathcal{NP} \neq \text{co-}\mathcal{NP}$ ו־$\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ אלא אם השאלה מציינת אחרת.

בהצלחה!

1			
2			
3א		3ב	

חלק I

שאלה 1 (17 נק')

נסמן $A = \{\langle M_1, M_2, M_3\rangle : L(M_1) \cap L(M_2) = L(M_3)\}$.

לאיזו מחלקה שייכת השפה A? הוכח/הוכיחי את קביעתך.

תשובה: $\overline{\mathcal{RE} \cup \text{co-}\mathcal{RE}}$

הוכחה:
להלן רדוקצית מיפוי מהשפה EQ_{TM} לשפה A: בהנתן זוג מ"ט M_1 ו-M_2, נחזיר את השלשה $\langle M_{\Sigma^*}, M_1, M_2\rangle$ כאשר M_{Σ^*} היא מ"ט שמקבלת כל קלט.
ראינו בכיתה ש-$EQ_{TM} \notin \mathcal{RE} \cup \text{co-}\mathcal{RE}$ ולכן נקבל שגם $A \notin \mathcal{RE} \cup \text{co-}\mathcal{RE}$.

שאלה 2 (18 נק')

נגדיר מודל חישובי חדש בשם אוטומט תור. זהו אוטומט סופי לא דטרמיניסטי המצויד במבנה נתונים מסוג תור FIFO[1]. פרט להבדל במבנה הנתונים, האוטומט מתנהג בדיוק כמו אוטומט מחסנית.

האם מחלקת השפות הניתנות לקבלה ע"י אוטומט תור היא מחלקת השפות חסרות ההקשר? נמק/י את קביעתך.

תשובה: שקר

דוגמא נגדית:
ראינו בכיתה שהשפה $A = \{ww : w \in \Sigma^*\}$ אינה חסרת הקשר, אבל קל לכתוב אוטומט תור שמקבל אותה (פונקצית המעברים היא כמו של אוטומט המחסנית שמקבל את $\{ww^R : w \in \Sigma^*\}$).

הערה:
למעשה אוטומט תור שקול למכונת טיורינג (הוכיחו!) ובפרט, מחלקת השפות המתקבלת ע"י אוטומט תור היא $\mathcal{RE}$.

[1] כלומר, הכנסת איברים היא בסוף התור והוצאת/קריאת איברים היא מראש התור.

שאלה 3 (20 נק')

<u>הגדרה:</u> בהנתן קבוצה S של מספרים בקטע $[0,1]$, נאמר שניתן לארוז אותם ב–k תאים אם יש חלוקה של המספרים ל–k קבוצות כך שסכום כל קבוצה אינו עולה על 1.

<u>דוגמא:</u> את הקבוצה $S = \{0.2, 0.5, 0.6, 0.7, 0.9\}$ לא ניתן לארוז בשלושה תאים (למרות שהסכום הכולל קטן מ–3) אך כן ניתן לארוז בארבעה תאים.

הוכח/הוכיחי כי בעית ההכרעה הבאה היא $\mathcal{NP}$–שלמה.

- בהנתן קבוצה S של מספרים בקטע $[0,1]$[2] ומספר טבעי k, האם ניתן לארוז את S ב–k תאים?

ראשית, הוכח/הוכיחי שהבעיה היא $\mathcal{NP}$–קשה; שנית, הראה/הראי שהבעיה שייכת ל–$\mathcal{NP}$.

סעיף א' (12 נק')

הוכחת $\mathcal{NP}$–קושי:
נתאר רדוקציה פולינומיאלית מבעית Set Partition. בהנתן קלט, קבוצה A של מספרים טבעיים, נחשב את סכומם $m = \sum(A)$, נגדיר קבוצת מספרים רציונליים S ע"י $S = \{2a/m : a \in A\}$ ונבחר $k = 2$.
הרדוקציה, אם כן, היא $f(A) = \langle S, 2 \rangle$.
נכונות הרדוקציה נובעת מכך שחלוקה של איברי A לשתי קבוצות A_1, A_2 המקיימת

$$\sum(A_1) = \sum(A_2) = m/2$$

שקולה לאריזה בשני תאים של S.
מאחר ובתירגול ראינו ש–Set Partition היא $\mathcal{NP}$–קשה, כך גם הבעיה שלנו.
הערה: קל לראות שהמספרים המתקבלים הם רציונליים בקטע $[0,2]$; אם מי מהם גדול מ–1, התשובה בוודאות "לא" ולכן ניתן להחזיר קלט קבוע שאינו בשפה.

[2] משיקולי ייצוג, כל המספרים ב–S הם רציונליים וכל אחד מהם מתואר ע"י ייצוג בינארי של המונה והמכנה שלו.

סעיף ב' (8 נק')

הוכחת שייכות ל-$\mathcal{NP}$:
טריוויאלי.

מסגרת "חירום" לשאלה פתוחה מספר _____, סעיף _____:

חלק II

1. יהיה $M_0, M_1, M_2, \ldots$ מספור כלשהו של כל מכונות הטיורינג מעל א"ב Σ. לאיזו מחלקה שייכת השפה $A = \{\langle M_i \rangle : \exists j > i \; L(M_j) = \Sigma^*\}$?

   (א) $\mathcal{R}$.

   (ב) $\mathcal{RE} \setminus \mathcal{R}$.

   (ג) $\text{co-}\mathcal{RE} \setminus \mathcal{R}$.

   (ד) $\overline{\mathcal{RE} \cup \text{co-}\mathcal{RE}}$.

קיימות אינסוף מ"ט שונות המקבלות את השפה Σ^* (למשל מכונה שהולכת k צעדים ימינה ואז מקבלת, לכל k טבעי). לכן, לכל i מתקיים התנאי והשפה A היא טריוויאלית.

2. יהיה $M_0, M_1, M_2, \ldots$ מספור כלשהו של כל מכונות הטיורינג מעל א"ב Σ. לאיזו מחלקה שייכת השפה $B = \{\langle M_i \rangle : \exists j < i \; L(M_j) = \Sigma^*\}$?

   (א) $\mathcal{R}$.

   (ב) $\mathcal{RE} \setminus \mathcal{R}$.

   (ג) $\text{co-}\mathcal{RE} \setminus \mathcal{R}$.

   (ד) $\overline{\mathcal{RE} \cup \text{co-}\mathcal{RE}}$.

נבחר j_0 כלשהו כך ש-$L(M_{j_0}) = \Sigma^*$ (קיימות אינסוף כאלו, כאמור). נבחין ש-$\overline{B}$ שפה סופית כיוון ש-$\overline{B} \subseteq \{\langle M_0 \rangle, \ldots, \langle M_{j_0} \rangle\}$. לכן $\overline{B}$ כריעה וכך גם משלימתה B.

3. נגדיר את בעית $10\text{-}\textsc{IntegerProgramming}$ באופן הבא. הקלט S הוא מערכת ליניארית של אי־שיוויונים במשתנים $x_1, \ldots, x_n$ עם מקדמים שלמים, לדוגמא:

$$\begin{aligned} 17x_1 + x_2 &\leq 3, \\ 165x_1 - x_2 - 2x_3 &\geq 1 \end{aligned}$$

הקלט S שייך לשפה אם"ם יש פתרון למערכת שבו ערכי כל המשתנים הם שלמים ומקיימים $|x_i| \leq 10$. לאיזו מחלקה שייכת השפה $10\text{-}\textsc{IntegerProgramming}$?

   (א) $\mathcal{P}$.

   (ב) $\mathcal{NP} \cap \text{co-}\mathcal{NP}$.

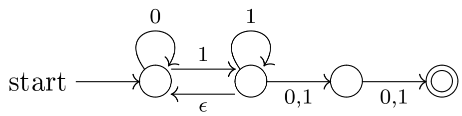
   (ג) $\mathcal{NPC}$.

   (ד) $\mathcal{R} \setminus \mathcal{NP}$.

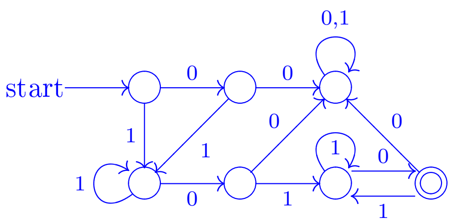
אותה הרדוקציה שראינו בכיתה להוכחת $\mathcal{NP}$־קושי של $\textsc{IntegerProgramming}$ עובדת גם כאן (כיוון שהיא משתמשת רק במשתנים שערכם 0 או 1). כמובן שהשפה ב-$\mathcal{NP}$ ולכן ב-$\mathcal{NPC}$.

4. שלושה מארבעת הבאים מגדירים את אותה השפה. מיהו יוצא הדופן?

(א) האוטומט הלא דטרמיניסטי



(ב) האוטומט הדטרמיניסטי



(ג) הביטוי הרגולרי $R = (0 \cup 1)^* \, 1 \, (0 \cup 1) \, (0 \cup 1)$.

(ד) הדקדוק חסר ההקשר $G = \{S \to 0S|1S|1T, \; T \to 0U|U1|10, \; U \to 0|1\}$.

השפה המשותפת היא: מילים בינאריות בהן התו השלישי מהסוף הוא 1.

5. תהיינה A, B, C **שפות ונתון כי** $A \le_m B \le_p C$ **וכן כי** $B \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{CFL}$. **איזו מהאפשרויות הבאות נכונה?**

(א) $A \in \mathcal{P}$.

(ב) $C \in \mathcal{P}$.

(ג) $C \neq \varnothing$.

(ד) אף אחת מהתשובות א׳–ג׳ אינה נכונה.

מכיוון ש–$B \neq \varnothing$ **ויש רדוקציה מ–**B **ל–**C **אז גם** $C \neq \varnothing$**: ניקח** $x \in B$ **ואז** $f(x) \in C$.

6. נאמר שגרף לא מכוון $G = (V, E)$ ***ניתן לפירוק ל–k קליקים*** **אם קיימת חלוקה של** V **ל–**k **חלקים שכל אחד מהם משרה קליק ב–**G**; הווה אומר, אם יש קבוצות צמתים זרות** $V_1, V_2, \ldots, V_k$ **כך ש–**$\bigcup_{i=1}^{k} V_i = V$ **ולכל** $1 \le i \le k$ **ולכל** $u, v \in V_i$ **שונים מתקיים** $(u, v) \in E$.
לאיזו מחלקה שייכת הבעיה הבאה?

- **נתון** G**, האם ניתן לפרק אותו ל–**k **קליקים?**

(א) הבעיה היא ב–$\mathcal{P}$ **לכל** k**, גם כאשר** k **הוא חלק מהקלט.**

(ב) כל עוד k **קבוע, הבעיה ב–**$\mathcal{P}$**; כש–**k **חלק מהקלט, הבעיה היא ב–**$\mathcal{NPC}$.

(ג) יש $k_2 > k_1$ **כך שהבעיה ב–**$\mathcal{NPC}$ **עבור** $k = k_1$ **וב–**$\mathcal{P}$ **עבור** $k = k_2$.

(ד) הבעיה היא ב–$\mathcal{NPC}$ **לכל** k **קבוע.**

נבחין ש–G **ניתן לפירוק ל–**k **קליקים אמ״ם** $\overline{G}$ **הוא** k**–צביע. ראינו בכיתה ש–**3-Col **היא** $\mathcal{NP}$**–קשה, ומאידך בדיקה האם גרף הוא 1–צביע היא טריוויאלית (רק גרף ללא קשתות עונה על התנאי).**

הערה: גם בדיקה האם גרף הוא 2–צביע היא פולינומיאלית, כפי שלומדים בקורס אלגוריתמים.

7. תהי $L \subseteq \{0,1\}^3$ שפה <u>לא ריקה</u> של מילים באורך 3. נסמן ב־n_L את מספר מחלקות השקילות ביחס $\sim_L$. איזו מהאפשרויות הבאות נכונה?

(א) קיימת L כזו עבורה $n_L = 3$.

(ב) קיימת L כזו עבורה $n_L = 19$.

(ג) לכל L כזו מתקיים $6 \leq n_L \leq 18$.

(ד) לכל L כזו מתקיים $4 \leq n_L \leq 16$.

קל לראות של־DFA הקטן ביותר שמקבל את השפה $\{x : |x| = 3\}$ יש **5** מצבים; כמו כן, תמיד ניתן לבנות DFA (לאו דווקא מינימלי) בעל **16** מצבים שמקבל את L באופן הבא: לכל מילה באורך **3** לכל היותר יש מצב משלה (ויש $1+2+4+8=15$ כאלו) ובנוסף יש מצב "בור".

8. לאיזו מחלקה שייכת הבעיה AllSat, המוגדרת כדקלמן?

- נתונה נוסחת CNF ϕ, האם יש לה השמה כך שבכל פסוקית <u>כל</u> הליטרלים מקבלים ערך אמת?

(א) שפות סופיות.

(ב) שפות אינסופיות ב־$\mathcal{P}$.

(ג) $\mathcal{NPC}$.

(ד) co-$\mathcal{NPC}$.

קל לראות ש־$\phi \in$ AllSat אמ"ם אין ב־ϕ שני ליטרלים סותרים (קרי, x ו־$\overline{x}$).

9. נגדיר את המודל החישובי הבא: $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$ כמו במ"ט רגילה אבל כאן $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow\} \times \mathbb{N}$ כשהמספר הנוסף מציין כמה צעדים יש לזוז בכיוון הרצוי. למשל, אם $\delta(q, a) = (p, b, \rightarrow, 1234)$ אז המכונה תעבור ממצב q למצב p, תכתוב b על הסרט במקום ה־a ותזוז **1234** צעדים ימינה. מהי מחלקת השפות הניתנת להכרעה במודל החדש?

(א) $\mathcal{R}$.

(ב) מחלקה $\mathcal{C}$ כלשהי המקיימת $\mathcal{R} \subsetneq \mathcal{C} \subsetneq \mathcal{RE}$.

(ג) $\mathcal{RE}$.

(ד) מחלקה $\mathcal{C}$ כלשהי המקיימת $\mathcal{RE} \subsetneq \mathcal{C}$.

המודל שקול לחלוטין למ"ט רגילה; רק צריך להוסיף מצבים ומעברים שמממשים את הצעדים העודפים.