

1. מבחן מועד א' במודלים חישוביים, סמסטר א' 2008

בית הספר למדעי המחשב, אוניברסיטת תל-אביב

מרצה: פרופ' נחום דרשוביץ
מתרגלת: ריקי רוזן

28/04/08

2. הוראות

3. מומלץ לקרא את כל ההנחיות והשאלות בתחילת המבחן, לפני תחילת כתיבת התשובות.
4. משך הבחינה – שלוש שעות. חומר עזר מותר: שני דפי פוליו (דו צדדיים) בלבד.
5. יש לענות על השאלות הפתוחות במקום המיועד לכך בטופס השאלון (טופס זה) ועל השאלות הסגורות בטופס התשובות.
6. מחברות הבחינה לא ייקראו, וישמשו כטיוטה בלבד.
7. יש למלא בכל דף של השאלון מספר ת.ז. ומספר מחברת.
7. יש למלא בטופס התשובות שם, ומספר ת.ז.
6. במבחן 2 שאלות "פתוחות" ו-10 שאלות "סגורות".
 - א. בנוגע לשאלות הפתוחות:
 - הניקוד לכל סעיף מופיע בתחילת הסעיף.
 - יש לענות על השאלות במקום המיועד לכך בטופס השאלון.
 - יש לענות תשובות ברורות ותמציתיות. תשובות מסורבלות יגררו הורדת נקודות.
 - לכל סעיף התשובה "אינני יודעת" מזכה ב-20% ממשקל הסעיף. במקרה זה אין להוסיף שום הסבר.
 - ב. בנוגע לשאלות הסגורות:
 - לכל שאלה יש לסמן תשובה אחת בדף התשובות המצורף.
 - יש לזכור למלא שם, ת.ז. ומספר גרסה בדף התשובות המצורף.
 - הניקוד לכל שאלה הוא 5 נקודות.
 7. יש לדאוג שהבודקים יוכלו לקרוא את התשובות ללא שימוש במיקרוסקופ.
 8. כל המספרים המופיעים בהגדרות הם מספרים שלמים, אי שליליים, ונתונים בייצוג בינארי, אלא אם כן נאמר במפורש אחרת.
 9. בשאלות בהן יש לתאר מכונת טיורינג, ניתן להסתפק בתיאור מילולי משכנע של אופן פעולת המכונה, ואין צורך להגדיר את פונקציית המעברים שלה, אלא אם הדבר התבקש במפורש.
 10. מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בכיתה (בהרצאה, בתרגול, או בתרגיל בית) בתנאי שמצטטים אותה באופן מדויק. טענות אחרות (כאלה שהוכחו בספר, בהרצאות מהסמסטר הקודם וכו') יש להוכיח.
11. בכל השאלות הניחו כי: $NP \neq coNP$ ו- $NP \neq P$, למעט אם נאמר אחרת.

.8

בהצלחה!

.9

שאלה 2 (25 נקודות)

נתונה השפה $L = \{ \langle M \rangle \mid \text{SAT} \leq_p L(M) \}$

האם השפה L ב- R , ב- RE אך לא ב- R , ב- $coRE$ אך לא ב- R , או שאינה ב- $RE \cup coRE$? הוכיחו!

הוכחה:

אינה ב- $coRE$: נראה ע"י $H_{TM} \leq_m L$. בהינתן M, w קלט ל H_{TM} הרדוקציה בונה M' קלט ל L באופן

הבא:

M'

קלט x :

הרץ את M על w

קבל את x אם $x \in 3\text{-col}$ (או משל כל בעיה שהיא NPC או H_{TM})

ברור שהרדוקציה חשיבה, שכן 3-col כריעה.

נכונות: נשים לב שאם $\langle M, w \rangle \notin H_{TM}$ אז $L(M') = \emptyset$ ולכן אין רדוקציה מ- SAT .

אם $\langle M, w \rangle \in H_{TM}$ אז $L(M') = 3\text{-col}$ ולכן יש רדוקציה כזו.

אינה ב- RE : נראה ע"י $H_{TM}^C \leq_m L$. בהינתן M, w קלט ל H_{TM}^C הרדוקציה בונה M' קלט ל L באופן

הבא:

M'

קלט x :

אם $x \in 3\text{-col}$ אז קבל

אחרת:

הרץ את M על w

קבל את x .

ברור שהרדוקציה חשיבה, שכן 3-col כריעה.

נכונות: נשים לב שאם $\langle M, w \rangle \in H_{TM}^C$ אז $L(M') = 3\text{-col}$ ולכן יש רדוקציה כזו. אם $\langle M, w \rangle \notin H_{TM}^C$

אז $L(M') = \Sigma^*$ ולכן אין רדוקציה מ- SAT . ניתן גם לבחור בעיה אחרת ב- P ולהשתמש בהנחה ש- $P \neq NP$.

חלק ב'

1. מהי המחלקה הקטנה ביותר ביחס להכלה בה נמצאת השפה $L = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \in \text{coRE} \setminus \text{R} \}$?

א. R

ב. RE

ג. coRE

ד. לא ב RE ולא ב coRE.

הסבר: לשפה ב $\text{coRE} \setminus \text{R}$ אין מ"ט שמקבלת אותה. L זו השפה הריקה.

2. מהי המחלקה הקטנה ביותר ביחס להכלה בה נמצאת השפה:

$L = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ halts for all inputs or } |Q| > 1000 \}$

א. R

ב. RE

ג. coRE

ד. לא ב RE ולא ב coRE.

נקבל שתי תשובות: א נכון כאשר מניחים ש הא"ב הוא קבוע למשל $\{0,1\}$ – הייתם אמורים להניח זאת שכן אמרנו בכיתה שאם לא נאמר אחרת אז זו ברירת המחדל. במצב זה - יש רק מספר סופי של מכונות עם מספר מצבים קטן מ 1000 (זאת מכיוון שיש מס' סופי של פונקציות מעבר שונות) ולכן מספר סופי של מכונות כאלו אשר עוצרות על כל קלט כיוון שקל לבדוק אם מספר המצבים של מכונה גדול מ 1000. לכן שפה זו ב R אם לא מניחים שהא"ב קבוע אז התשובה הנכונה היא ד

3. נתבונן בשפה:

$L = \{ G \mid G \text{ יש קליק בגודל } n-5 \text{ ואין בו IS בגודל } n/2 \text{ כאשר } n \text{ הוא מספר קודקודי הגרף } \}$
מהי המחלקה הקטנה ביותר ביחס להכלה בה נמצאת L?

א. R

ב. NPC

ג. P

ד. NP

הסבר: עבור n מספיק גדול בכל גרף שבו קליק בגודל n-5 אין בו IS בגודל n/2. בדיקה של קליק בגודל n-5 מתבצעת בזמן פולינומיאלי.

4. יהיו $A \in \text{NPC}$ ו- $B \in \text{NP}$ אזי בהכרח:

א. $A \setminus B \in \text{NPC}$

ב. $A \setminus B \in \text{NP}$

ג. א' ו-ב' נכונות.

ד. אף תשובה אינה נכונה.

הסבר: למשל $A=IS$ ו- $B=Clique$ אז
 $A \setminus B = \{G, k, c \mid \text{there is IS of size } >k \text{ and no Clique of size } >c\}$
 $NP=coNP$

5. נתבונן בשפה L : $\{A \mid \text{הוא NFA שמקיים SAT } L(A) \leq_p \text{ SAT}\}$. המחלקה הקטנה ביותר ביחס להכלה אליה L שייכת:

- א. P
- ב. NP
- ג. R
- ד. לא ב RE ולא ב $core$

הסבר: שפות רגולריות הן ב- P ולכן יש רדוקציה כזו. באופן מפורש: בהינתן מילה x בדוק אם $x \in L(A)$ ע"י הרצה באוטומט. אם כן שלח נוסחה ספיקה, אחרת שלח נוסחה שאינה ספיקה.

6. נתבונן בשפה הבאה:

$$MSet-Cover = \{A_1, \dots, A_n, K \mid S = \cup_i A_i\}$$

$\{$ קיימות K קבוצות שאיחודן הוא S ולא קיימות $K-1$ קבוצות שאיחודן הוא S המחלקה הקטנה ביותר ביחס להכלה אליה השפה שייכת:

- א. P
- ב. NP
- ג. NPC
- ד. $NP-HARD$

7. נתבונן בבעיה הבאה:

$$MHAMPATH = \{G=(V,E), s, t \mid$$

\exists יש מסלול המילטון מ- s ל- t אך אין $(|V|-2)!$ מסלולי המילטון שונים מ- s ל- t המחלקה הקטנה ביותר ביחס להכלה אליה השפה שייכת:

- א. P
- ב. NP
- ג. NPC
- ד. $NP-HARD$

שקול לשאלה: האם יש מסלול המילטון מ- s ל- t וכן G איננו גרף שלם.

8. נתבונן בשפה מעל $\{0,1\}$, $L = \{xy^Rzy^R \mid |x|, |y|, |z| \geq 1\}$, כאשר x^R הינה ההיפוך של x . דהיינו אם $x = x_1x_2 \dots x_n$ אזי $x^R = x_nx_{n-1} \dots x_1$ וכן $\varepsilon^R = \varepsilon$.

- א. L רגולרית וחסרת הקשר
- ב. L לא רגולרית ולא חסרת הקשר.
- ג. L רגולרית אך לא חסרת הקשר.
- ד. L חסרת הקשר אך לא רגולרית

הסבר: זו בדיוק שפת כל המילים שהאות הראשונה שלהן והאחרונה שלהן זהות ולכן האות השנייה זהה לאות הלפני אחרונה

9. נתבונן בשפה L : G הוא דיקדוק חסר הקשר ו- $L(G) \leq_m SAT$. $L = \{ \langle G \rangle \mid SAT \leq_m L(G) \}$. המחלקה הקטנה ביותר ביחס להכלה אליה L שייכת:

א. P

ב. R

ג. RE

ד. לא ב RE ולא ב core

הסבר: צריך לבדוק ש $\phi, L(G) \neq \Sigma^*$. קל לודא ש $L(G) \neq \phi$ ושפת הדקדוקים שמקיימים $L(G) \neq \Sigma^*$ היא ב RE. שימו לב שהרדוקציה היא רדוקציית מיפוי ולכן ניתן פשוט לפתור את SAT ולשלוח איבר מתאים ב $L(G)$ או מהמשלים.

10. תהי $L_{\oplus} = \{ a^k b^t c^n d^m \mid k, t, m, n \geq 0 \text{ and } (k=t \text{ or } n=m \text{ but not both}) \}$. אלו מהאפשרויות הבאות נכונה?

א. L_{\oplus} חסרת הקשר.

ב. ל- L_{\oplus} יש אין-סוף מחלקות שקילות ולכן אינה חסרת הקשר.

ג. אפשר להוכיח ע"י למת הניפוח כי L_{\oplus} אינה חסרת הקשר.

ד. L_{\oplus} אינה חסרת הקשר אך לא ניתן להפעיל עליה ישירות את למת הניפוח.

הסבר: זהו שירשור של שתי שפות ח"ה שראינו בכיתה: $L_1 = a^n b^n$ עם $L_2 = \{ c^n d^m \mid n \neq m \}$