תעודת זהות: ____________________

מספר מחברת: ____________________

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | סהכ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

# מבחן מועד א' - מודלים חישוביים, סמסטר ב' תשע"ג (2013)


בית הספר למדעי המחשב, אוניברסיטת תל-אביב

מרצים: פרופ' ישי מנצור, ד"ר יפתח הייטנר

מתרגלים: מריאנו שיין, אורן זלצמן


**26/07/13**

## הוראות

1. מומלץ לקרא את כל ההנחיות והשאלות בתחילת המבחן, לפני תחילת כתיבת התשובות.
2. משך הבחינה – שלוש שעות. לא תינתן כל הארכה נוספת.
3. חומר עזר מותר: שני דפי פוליו (דו צדדיים) בלבד עם שם התלמיד/ה.
4. **יש לענות על השאלות הסגורות בטופס התשובות ועל השאלות הפתוחות במקום המיועד לכך בטופס השאלון (טופס זה).** מחברות הבחינה לא ייקראו, וישמשו כטיוטה בלבד.
5. יש למלא בכל דף של השאלון מספר ת.ז. ומספר מחברת.
   יש למלא בטופס התשובות שם, מספר ת.ז **ומספר גרסה**.
6. במבחן 14 שאלות סגורות ו-5 שאלות פתוחות.
   א. בנוגע לשאלות הסגורות:
   - סה"כ 32 נקודות. הניקוד לכל שאלה מופיע לידה מספר השאלה.
   - תשובה שגויה לא תזכה לנקודות.
   - לכל שאלה יש לסמן תשובה אחת בטופס התשובות המצורף.
   - יש לזכור למלא שם, ת.ז. ו**מספר גרסה** בטופס התשובות המצורף.

   ב. בנוגע לשאלות הפתוחות:
   - סה"כ 70 נקודות. הניקוד לכל שאלה מופיע לידה מספר השאלה.
   - סימון "תשובה ריקה" יזכה בחלק (קטן) מהנקודות כמצוין ליד מספר השאלה.
   - יש לענות על השאלות במקום המיועד לכך בטופס השאלון.
   - יש לענות תשובות ברורות ענייניות ותמציתיות.
7. מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בכיתה (בהרצאה, בתרגול, או בתרגיל בית) בתנאי שמצטטים אותה במדויק. טענות אחרות (כאלה שהוכחו בספר, בהרצאות מהסמסטר הקודם, וכו') יש להוכיח.
8. יש להניח $P \neq NP$, אלא אם מצוין אחרת.

| מספר הגרסה שלך הוא: **1** סמן זאת כרגע בטופס התשובות! |
|---|

בהצלחה!

תעודת זהות: ______________________

מספר מחברת: ______________________

# חלק א: שאלות סגורות

**<u>חלק א.1</u>**

עבור ארבע בעיות (שפות) A, B, C, ו-D נתון:

- יש רדוקציה פולינומיאלית מ- A ל- B
- יש רדוקציה פולינומיאלית מ- B ל- C
- יש רדוקציה פולינומיאלית מ- D ל- C

בכל אחת מהשאלות הבאות מוצגת טענה. בטופס התשובות יש לבחור ע"פ המפתח הבא:

א. הטענה **נכונה,** עבור כל בחירה של השפות A, B, C, ו-D
ב. הטענה **לא נכונה,** עבור כל בחירה של השפות A, B, C, ו-D
ג. **לפעמים** (בחירה של השפות A, B, C, ו-D ) הטענה נכונה ולפעמים הטענה אינה נכונה

**<u>טענה 1 (2 נקודות)</u>**

אם A היא NP-complete אזי C היא NP-complete

**<u>לפעמים</u>**

C יכולה להיות לא ב- NP

**<u>טענה 2 (2 נקודות)</u>**

אם A היא NP-complete ו- C ב- NP אזי B היא NP-complete

**<u>נכונה</u>**

B היא ב- NP כי C ב- NP

Bשלמה ל-NP כי A היא NP-complete

**<u>טענה 3 (2 נקודות)</u>**

C היא NP-complete ו- D אינה ב-NP

**<u>לא נכונה</u>**

אם C ב- NP אזי גם D ב- NP (ניתן לפתור את D ע"י ביצוע רדוקציה ל-C בזמן פולינומי ולהריץ את הפתרון של C)

**<u>טענה 4 (2 נקודות)</u>**

אם ל- C יש אלגוריתם קירוב עם פקטור 2 (2-approximation) אזי ל- D יש אלגוריתם קירוב עם פקטור 2

**<u>לפעמים</u>**

רדוקציה לא משמרת בהכרח את יחס הקירוב

**<u>טענה 5 (2 נקודות)</u>**

C היא NP-complete ו- A היא ב- RE ולא ב- R

**<u>לא נכונה</u>**

אם יש רדוקציה מ-A ל-C אזי ניתן לפתור את A בעזרת פתרון של C

אם C היא ב- NP אזי היא ניתנת להכרעה, וניתן בעזרתה להכריע את A

תעודת זהות: ______________________

מספר מחברת: ______________________

**חלק א.2**

עבור ארבע בעיות (שפות) A, B, C, ו-D נתון:

- יש רדוקצית מיפוי מ- A ל- B
- יש רדוקצית מיפוי מ- B ל- C
- יש רדוקצית מיפוי מ- D ל- C

בכל אחת מהשאלות הבאות מוצגת טענה. בטופס התשובות יש לבחור ע"פ המפתח הבא:

א. הטענה **נכונה**, עבור כל בחירה של השפות A, B, C, ו-D

ב. הטענה **לא נכונה**, עבור כל בחירה של השפות A, B, C, ו-D

ג. **לפעמים** (בחירה של השפות A, B, C, ו-D ) הטענה נכונה ולפעמים הטענה אינה נכונה

**טענה 6 (2 נקודות)**

A היא ב- RE ואינה ב-R ו- C היא ב-R

**לא נכונה**

אם C ב-R אזי גם A ב-R

**טענה 7 (2 נקודות)**

אם C היא RE אזי החיתוך של B ו-D היא ב- RE

**נכונה**

אם C היא RE אזי B ו-D הן RE ולכן גם החיתוך שלהם RE

**טענה 8 (2 נקודות)**

אם A היא ב- R אזי המשלים של B ב- R

**לפעמים**

ניתן לעשות רדוקציה מבעיה ב-R (נניח 1*) לבעיה שאפילו אינה RE

**טענה 9 (2 נקודות)**

המשלים של A אינו ב- RE ו- B ב- co-RE

**לא נכונה**

אם B היא coRE אזי A היא coRE ולכן לפי הגדרה המשלים של A ב-RE

**טענה 10 (2 נקודות)**

אם C היא co-RE אזי D היא co-RE

**נכונה**

המשלים של C הוא RE

אם יש רדוקציה מ-D ל-C יש רדוקציה מהמשלים של D למשלים של C (אותה רדוקציה)

תעודת זהות: ____________________

מספר מחברת: ____________________

**חלק א.3**

בכל אחת מן השאלות הבאות נתונות שתי שפות L1, L2. סמן עבור כל שאלה:

א. אם מתקיים $L_1 \subsetneq L_2$

ב. אם מתקיים $L_2 \subsetneq L_1$

ג. אם מתקיים $L_1 = L_2$

ד. אם לא מתקיים אף אחד מהסעיפים הנ"ל

**טענה 11 (3 נקודות)**

L1 = L(R) כאשר R הינו הביטוי הרגולרי: R=0*1*

L2 = L(G) כאשר G הינו דקדוק חסר הקשר אשר מתואר ע"י כללי הגזירה הבאים:

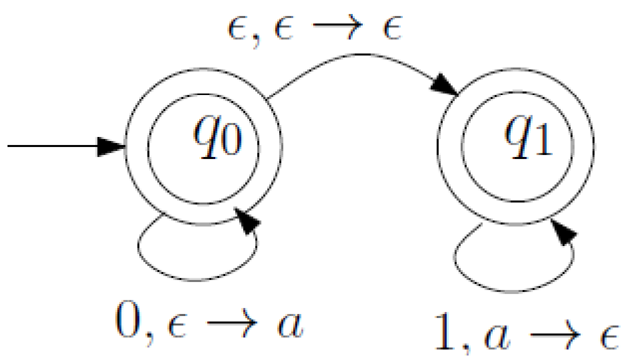
S-> 0S1 | ε

**טענה 12 (3 נקודות)**

L1 = L(G) כאשר G הינו דקדוק חסר הקשר אשר מתואר ע"י כללי הגזירה הבאים:

S-> 0S1 | 0S | ε

L2 = L(P) כאשר P הינו אוטומט מחסנית אשר מתואר ע"י האיור הבא:




**טענה 13 (3 נקודות)**

L1 = L(G) כאשר G הינו דקדוק חסר הקשר אשר מתואר ע"י כללי הגזירה הבאים:

S->AS | SB | ε        A->a | ε        B->b | ε

L2 = L(R) כאשר R הינו הביטוי הרגולרי: R=a*b*

**טענה 14 (3 נקודות)**

L1 = L(R1) כאשר R הינו הביטוי הרגולרי: R1=((0*1*)* 11(0*1*)*)*

L2 = L(R2) כאשר R הינו הביטוי הרגולרי: R=(0 U 1)* 11 (0 U 1)*

תעודת זהות: ______________________

מספר מחברת: ______________________

# חלק ב: שאלות פתוחות

**שאלה 1 (20 נקודות).**

**אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה) ☐ (4 נקודות)**

*חתך* בגרף G=<V,E> הוא חלוקה של הצמתים V לשתי קבוצות זרות V=V1⋃V2.

*גודלו* של חתך כנ"ל הוא מספר הקשתות הסמוכות על שני חלקי החתך:

$|\{(u,v) \in E : u \in V1, v \in V2\}|$

לחתך בו מתקיים $|V1| = |V2|$ קוראים "חציה" (*Bisection*).

בעיית ההכרעה *LargeCut* היא הבעיה הבאה:

קלט: גרף G=<V,E> ומספר טבעי k

שאלה: האם קיים ב G **חתך** בגודל k לפחות

בעיית ההכרעה *LargeBisection* היא הבעיה הבאה:

קלט: גרף G=<V,E> ומספר טבעי k

שאלה: האם קיימת בגרף **חציה** בגודל k לפחות

בהנתן ש *LargeCut* היא **NPC**, הוכח כי *LargeBisection* היא ב **NPC**

1. הוכח כי *LargeBisection* היא ב **NP**
2. הראה רדוקציה מ *LargeCut* ל *LargeBisection*

**פתרון שאלה 1**

1. ה**עד** הוא חלוקה של קודקודי הגרף. ה**מוודא** בודק שהחלוקה היא אכן חצייה, ושמספר הקשתות החוצות אותה הוא **לפחות** k
2. בהנתן גרף G בעל n קודקודים ומספר k, פונקציית המיפוי f פולטת גרף 'G **הזהה** לG אך בתוספת n קודקודים בודדים, ואת המספר k.
   a. ברור כי f היא יעילה.
   יהי (G',k) = f(G,k)
   b. נניח (G,k) ב *LargeCut* ויהי (V1 ,V2) חתך בגדל k בו.. החציה בגדל k ב 'G תתקבל ע"י הוספת |V2| קודקדים בודדים לV1 ו הוספת |V1| קודקדים בודדים לV2
   c. נניח (G',k) ב *LargeBisection* (V1 ,V2) חציה בגדל k בו.. ה חתך בגדל k ב G תתקבל ע"י הורדת הקודקדים הבודדים מ V1 ו V2
3. הוכחה חילופית: הפונקציה f מחזירה גרף 'G שמורכב משני עותקים של G. וחסם 2k.
   a. ברור כי f היא יעילה.
   יהי (G',k) = f(G,k) כאשר G' מורכב מ- G1 ו- G2
   b. נניח (G,k) ב *LargeCut* ויהי (V1 ,V2) חתך בגדל k בו. החציה בגדל k ב 'G תתקבל ע"י לקיחת V1 ב- G1 ו- V2 ב- G2. ברור שזה חציה וגודל החתך 2k
   c. נניח (G',k) ב *LargeBisection* (V1 ,V2) חציה בגדל 2k. אזי או ב- G1 או G2 גודל החתך לכל היותר k.

תעודת זהות: ______________________
מספר מחברת: ______________________

**שאלה 2 (20 נקודות).**
**אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה) ☐ (4 נקודות)**

נתונה השפה הבאה:

$$L = \{<M> : \text{M is a Turing Machine and } \exists n>0, \forall w \in \Sigma^{n}, \text{M accepts } w\}$$

1. הראו ש-L היא ב- **RE**
2. הראו רדוקציית מיפוי מבעיית העצירה לשפה L

**פתרון שאלה 2**

1. פתרון א (מכונה לא-דטרמיניסטית) על קלט M, המכונה **מנחשת** את n , **מריצה** את M על כל המילים בארך n **ומקבלת** אם M מקבלת את כולם
פתרון ב (הרצה מבוקרת) עוברים על k מ-1 והלאה. לכל k מריצים את M על כל המילים באורך לכל היותר k במשך k צעדים. אם יש n≤k שעבורו כל המילים התקבלו עוצרים מקבלים.
פתרון ג (ע"י אנומרטור) מריצים את האנומרטור של M וכל פעם שיש בפלט מילה חדשה w בודקים אם כל המילים באורך של w כבר בפלט. אם כן עוצרים ומקבלים.
תשובה לא נכונה: עוברים על כל הערכים של n מ-n=1 וכו, ומריצים את M על כל המילים באורך n ומקבלים אם M קבלה את כולם.
הבעיה: Mעלולה לא לעצור על אחד הקלטים.
2. בהנתן קלט <M,w>, פונקציית המיפוי **יוצרת** מכונה M' שמוחקת את הקלט שלה, מריצה את M על הקלט w, ואז **מקבלת**.
השפה של M' היא $\Sigma^*$ אם M עוצרת על w (ואז M ב-L) ואחרת היא השפה הריקה (ואז M לא ב-L)

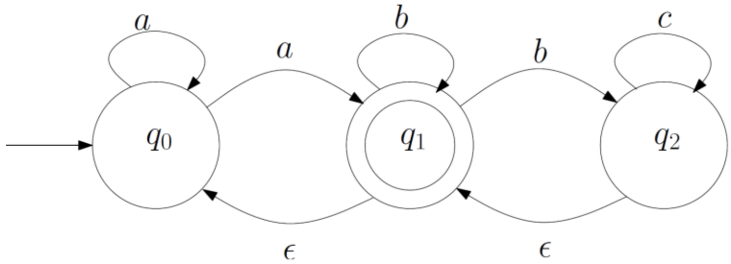
תעודת זהות: ____________________

מספר מחברת: ____________________

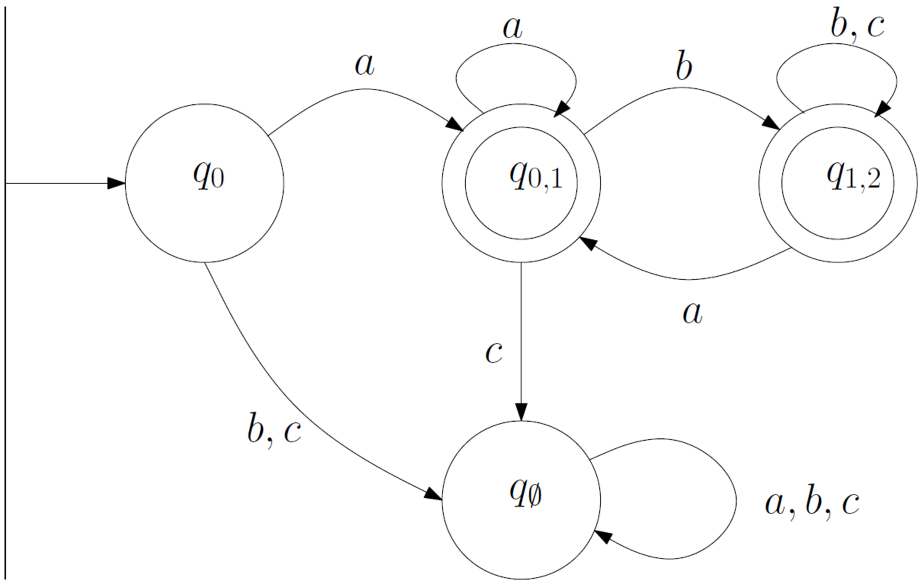
**שאלה 3 (10 נקודות).**

**אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה) ☐ (2 נקודות)**

נתון אוטומט סופי לא דטרמיניסטי (NFA), צייר אוטומט סופי דטרמיניסטי (DFA) שקול בעל מספר מצבים קטן ככל האפשר.




**פתרון לשאלה 3)**




____________________

תעודת זהות: ____________________

מספר מחברת: ____________________

**שאלה 4 (10 נקודות).**

**אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה) ☐ (2 נקודות)**

נתונה השפה הבאה:

{ <M,x,$1^n$> | M is a TM and $\forall c \in \Sigma^*$, M accepts in n steps when given $(x, c)$ as input}

יש להוכיח שהשפה ב Co-NPC.

**פתרון שאלה 4**

תהיה K שפה ב CoNP נראה רדוקציה פולינומיאלית מ K ל L (השפה בשאלה):

יהיה M מוודא פולינומיאלי P למשלים של K

נבנה N מ"ט זהה ל M פרט לכך שמעברים למצב המקבל ב M יעבירו למצב הדוחה ב N ומעברים למצב הדוחה ב M (או אי עצירה לאחר P צעדים) יעבירו למצב המקבל ב N.

פונקציית המיפוי תמפה איבר x לשלשה הסדורה (N, x, $1^n$) כאשר n=P(x) .

נשים לב ש P הוא הפולינום של המוודא M

מתקיים ש x שייך למשלים של K אמם (מהגדרת M) קיים c כך ש M מקבל את (c,x) לאחר P(x) צעדים

כלומר, x שייך ל K אמם לכל c, M לא מקבל את (c,x) לאחר P(x) צעדים

כלומר (מבניית N), x שייך ל K אמם לכל c, N מקבל את (c,x) לאחר P(x) צעדים

תעודת זהות: ______________________

מספר מחברת: ______________________

**שאלה 5 (10 נקודות).**

**אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה) ☐ (2 נקודות)**

בהינתן DFA A עם N מצבים:

הוכח שהשפה $L(A)$ הי אינסופית אם ורק אם קיימת $w \in L(A)$ כך ש-$N < |w| \leq 2N$

**פתרון שאלה 5**

a)3Q 3HW

לפי למת הניפוח, מילה ארוכה מאורך N ניתנת לניפוח שמשאירה בשפה ולפיכך השפה אינסופית.

לכוון השני נניח שהשפה אינסופית ונבחר את המילה W בשפה L שהיא הקצרה ביותר מבין המילים באורך גדול מ N. אם אורך W קטן שווה מ-2N סיימנו. אחרת, לפי למת הניפוח קיימת חלוקה של W ל- XYZ כך ש- $|Y|<N$ ו-XZ ב-L. כיוון שאורך XZ הוא לכל הפחות_N+1, יש לנו סתירה למינימליות של W.